ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 26 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 175.
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 36.
Α3. α Λ , β Σ , γ Σ , δ Λ , ε Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. x -2 παράγοντας ⇔ το 2 είναι ρίζα ⇔ P(2) = 0 ⇔

16 + 4α +2β +2 = 0 ⇔ 2α + β = -9 (1)

P(-1) = -6 ⇔ -2 + α – β+2 = -6 ⇔ α - β = -6 (2)

$\begin{cases} 2\alpha+\beta = -9 & (1) \\ \alpha-\beta = -6 & (2) \end{cases}$,προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

3α = -15 ⇔ **α = - 5** και αντικαθιστώντας στην (1) όπου $\alpha = -5$ προκύπτει $\boldsymbol{\beta = 1}$

Β2. Κάνοντας σχήμα Horner στη θέση 2 έχουμε

$$(x-2)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}$$

Β3. P(x) < 0 ⇔ $(x-2)(2x^2-x-1)<0$ Από τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

για $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup (1,2)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $\varphi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\cdot\varepsilon\varphi(-\varphi)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi)\cdot\sigma\varphi(\pi+\varphi)}=-1 \Leftrightarrow \frac{-\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot(-\varepsilon\varphi\varphi)}{-\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\varphi\varphi}=-1 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi^2\varphi=-1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2\varphi=1 \underset{\varepsilon\varphi\varphi>0}{\overset{\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}} \varepsilon\varphi\varphi=1 \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

Γ2. α) Για $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega \in (0,1)$, και

$$2\left(\ln(\eta\mu\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu\omega)\right) = 2\ln(\eta\mu\omega) + 2\ln(\sigma\upsilon\nu\omega) = \ln\left(\eta\mu^2\omega\right) + \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2\omega\right) =$$

$$\ln\left(\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega\right) = \ln\left(\eta\mu^2\omega \cdot \left(1 - \eta\mu^2\omega\right)\right) = \ln\left(\eta\mu^2\omega - \eta\mu^4\omega\right)$$

β) $2\left(\ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)\right) = \ln 3 - 4\ln 2$,αφού ζητάμε λύσεις $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

η εξίσωση, λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, ισοδυναμεί με την

$\ln\left(\eta\mu^2 x - \eta\mu^4 x\right) = \ln 3 - \ln 2^4 = \ln\frac{3}{16} \Leftrightarrow$ (από το 1-1 της λογαριθμικής)

$\eta\mu^2 x - \eta\mu^4 x = \frac{3}{16} \Leftrightarrow 16\eta\mu^4 x - 16\eta\mu^2 x + 3 = 0$.

Θέτουμε $\eta\mu^2 x = \rho$, οπότε για $\rho \in (0,1)$ έχουμε $16\rho^2 - 16\rho + 3 = 0$ με λύσεις

$\rho = \frac{1}{4}$, $\rho = \frac{3}{4}$ οπότε $\eta\mu^2 x = \frac{1}{4}$, $\eta\mu^2 x = \frac{3}{4}$ και αφού $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$

Γ3. Αντικαθιστώντας τους γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y = 1 & (\cdot 2) \\ \sqrt{3} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y = 2\sqrt{3} & (\cdot 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y = 2 & \cdot(-3\sqrt{3}) \\ 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6\sqrt{3} & \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} -3\sqrt{3}x + 3\sqrt{6}y = -6\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6\sqrt{3} \end{cases}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $\left(3\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)y = 0$

επομένως y=0. (Για τους σκοπούς αυτού του διαγωνίσματος προτείνουμε να θεωρηθεί προφανές ότι $3\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq 0$. Αν ωστόσο το θεωρείτε σκόπιμο τότε: $3\sqrt{6} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$3\sqrt{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$ (για θετικά μέλη) $\left(3\sqrt{6}\right)^2 = \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 6 = 3 \Leftrightarrow 54 = 3$ Ψευδής,

επομένως $3\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq 0$).

Για y=0 η πρώτη εξίσωση δίνει $\frac{1}{2}x = 1$ ή $x = 2$

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (2, 0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 \geq 2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=2. Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση x=2 την τιμή f(2)=2.

β) Αρχικά έχουμε

$g(x) = 4^x - 4\cdot 2^x + 6 = \left(2^x\right)^2 - 4\cdot 2^x + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $2^x = \omega$, $\omega > 0$

Έτσι ο τύπος του δεύτερου μέλους γίνεται $\omega^2 - 4\omega + 6$ για τον οποίο γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι παρουσιάζει , στους πραγματικούς αριθμούς άρα και στο διάστημα $(0,+\infty)$, ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση ω=2 την τιμή 2.

$\omega=2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση x=1 την τιμή g(1)=2

Σχόλιο: Εν όψη Γ΄ λυκείου προτείνουμε και τον ακόλουθο τρόπο παρουσίασης της λύσης:

Έχουμε $g(x) = 4^x - 4\cdot 2^x + 6 = \left(2^x\right)^2 - 4\cdot 2^x + 6 = f(2^x)$. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση που η ανεξάρτητη μεταβλητή της είναι 2 δηλαδή $2^x = 2 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$. Τότε η ελάχιστη τιμή της είναι η $g(1) = f\left(2^1\right) = f(2) = 2$

Δ2. α) Για το πεδίο ορισμού της h απαιτούμε $8^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow 8^{x-1} > 1 \Leftrightarrow 8^{x-1} > 8^0$.
Είναι 8>1 οπότε η εκθετική είναι γνησίως αύξουσα άρα x-1>0 ή x>1
Συνεπώς το πεδίο ορισμού της h είναι το διάστημα $(1,+\infty)$
Για το πεδίο ορισμού της φ απαιτούμε $g(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 2$.
Από την προηγούμενη μελέτη γνωρίζουμε ότι $g(x) \geq 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=1. Για κάθε άλλο $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η $g(x) > 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

β) Η τομή των πεδίων ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι το διάστημα $\Delta = (1,+\infty)$
Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση h(x)=φ(x), έχει λύση στο Δ.

$h(x)=\varphi(x) \Leftrightarrow \log(8^{x-1} - 1) + 3\log 2 = \log\left(g(x) - 2\right) \Leftrightarrow$

$\log(8^{x-1} - 1) + \log 2^3 = \log\left(g(x) - 2\right) \Leftrightarrow \log\left[(8^{x-1} - 1)\cdot 8\right] = \log\left(g(x) - 2\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 8^x - 8 = g(x) - 2 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^3 - 8 = \left(2^x\right)^2 - 4\cdot 2^x + 6 - 2 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^3 - \left(2^x\right)^2 + 4\cdot 2^x - 12 = 0$

Θέτουμε $\omega = 2^x$, $\omega > 0$, οπότε προκύπτει η πολυωνυμική εξίσωση $\omega^3 - \omega^2 + 4\omega - 12 = 0$. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner στη θέση ω=2 διαπιστώνουμε ότι η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $(\omega - 2)\left(\omega^2 + \omega + 6\right) = 0$ από την οποία προκύπτει η μοναδική λύση ω=2, δεκτή ως θετική. Τότε είναι $\omega = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \overset{(1-1)}{\Leftrightarrow} x = 1$.
Όμως η τιμή x=1 δεν ανήκει στο Δ επομένως η εξίσωση h(x)=φ(x) είναι τελικά αδύνατη και κατά συνέπεια οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων δεν έχουν κοινό σημείο.

Δ3. α) Η μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η συνάρτηση $q(x)=2ημ\big(π(x+c)\big)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι το 2 η οποία είναι η ελάχιστη που μπορεί να πάρει η συνάρτηση g. Δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $q(x)\le 2\le g(x)$ (1).

Για να έχουν κοινό σημείο οι δύο γραφικές παραστάσεις πρέπει να έχει λύση η εξίσωση $q(x)=g(x)$, δηλαδή πρέπει να υπάρχει τιμή του x για την οποία να ισχύουν ταυτοχρόνως οι ισότητες στην (1). Το δεύτερο ίσον στην (1) ισχύει μόνο για x=1 όπως έχουμε δείξει, άρα απαιτούμε να ισχύει και η q(1)=2.

$$q(1)=2 \Leftrightarrow 2ημ\big(π(1+c)\big)=2 \Leftrightarrow ημ\big(π(1+c)\big)=1 \Leftrightarrow π(1+c)=2κπ+\frac{π}{2} \Leftrightarrow c+1=2κ+\frac{1}{2}$$

$$c=2κ-\frac{1}{2}\ \text{, για } κ\in\mathbb{Z}$$

β) Για κάθε $x\neq 1$ είναι $g(x)>2\ge q(x)$ άρα $g(x)>q(x)$ οπότε και $g(x)\neq q(x)$.
Επομένως το μόνο σημείο που μπορεί να είναι κοινό είναι το (1,2) και αυτό συμβαίνει μόνο αν $c=2κ-\frac{1}{2}$, για $κ\in\mathbb{Z}$. Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του c, ούτε αυτό το σημείο είναι κοινό . Συνεπώς οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
Έχει ενδιαφέρον η Γεωμετρική ερμηνεία του Δ3.
Στο πρώτο από τα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και q για $c\neq 2κ-\frac{1}{2}$, για $κ\in\mathbb{Z}$, ενώ στο δεύτερο βλέπουμε τις γραφικές τους παραστάσεις για $c=2κ-\frac{1}{2}$, για $κ\in\mathbb{Z}$. Οι τιμές αυτές του c προκαλούν οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης q τέτοια, ώστε κάποιο από τα σημεία της με τεταγμένη 2 να συμπέσει με το σημείο (1,2) το οποίο είναι το μοναδικό σημείο που μπορεί να είναι κοινό.